<u>THEORIE DER TÖNE und TONSYSTEME</u>

<u>Vorbermerkungen zu einer Theorie der Töne und Tonsysteme in der Sprache der Mathematik</u>

1. Musik bedarf keiner Sprache. Musik entstammt der Sprache und die Sprache entstammt der Musik. Dies führt zum Huhn, zum Ei und zum Ende des linear-kausalen Denkens. Der Ausdruck „Ende des linear-kausalen Denkens" erweckt den Eindruck, das Denken bewege sich dabei geradlinig, doch sollte man vielleicht eher an eine geschlossene Linie denken, etwa einen Kreis.
2. Gedanken über Musik bedürfen einer Sprache. Das Denken formt die Sprache und die Sprache formt das Denken. Wir sprechen, wie wir denken und wir denken, wie wir sprechen.
3. Das Material der Musik, ihre der sinnlichen Wahrnehmung zugängliche Erscheinungsform, ihre „Materialisierung" sind die Töne und deren Verteilung in der Zeit. Wir halten die Sprache der Mathematik für geeignet, das Material der Musik zu beschreiben.
4. Beschreibung der Töne fußt auf ihrer (linearen) Ordnung und der Transponierbarkeit. Die Beschreibung enthält zwei Idealisierungen: wir ignorieren die Grenze des Hörbereiches und wir gehen von überabzählbarer Mächtigkeit der Menge aller Töne (analog der Punkte auf der Geraden) aus. Derlei Idealisierungen sind auch in der klassischen Physik üblich, wenn es darum geht, Naturphänomene mit den Mitteln der Mathematik zu beschreiben.
5. Die „Axiomatische Theorie der Töne" (Anhang I) leitet aus vier Axiomen her, dass die Menge der Intervalle - verstanden als strukturerhaltende Selbstabbildungen (Isomorphismen) der geordneten Menge der Töne - als Abel'sche Gruppe dem Zahlenstrahl (positive reelle Zahlen als multiplikative Gruppe bzw.Reelle Zahlen als addidive Gruppe) isomorph ist. Verwendet werden dabei Verfahren wie Dedekind'sche Schnitte und Kettenbruchdarstellung, die aus der Theorie der reellen Zahlen bekannt sind und auf die geordnete Menge der Intervalle übertragen werden.
6. Etwas ausführlicher erklärt: Die „Axiomatische Theorie der Töne" (Anhang I) setzt voraus, dass die Menge T der Töne wenigstens zwei Töne enthalte und dass es eine vollständige Ordnung auf dieser Menge gebe (tiefere und höhere Töne). Es wird eine Äquivalenzrelation auf dem Kartesischen Produkt T x T eingeführt („Vergleichbarkeit von

Tonschritten“). Diese muss folgenden Axiomen genügen: 1) Sie vertrage sich mit der Ordnung. Das bedeutet: zwei äquivalente Tonschritte sind entweder beide steigend oder beide fallend oder beide die Prim. 2) Wenn der Schritt von t_1 nach t_2 so groß ist wie der Schritt von t_3 nach t_4, dann ist der Schritt von t_1 nach t_3 so groß wie der Schritt von t_2 nach t_4. 3) Zum Tonschritt t_1-t_2 gibt es von jedem Ton t_3 aus einen Ton t_4, so dass der Schritt t_3-t_4 gleich groß ist wie der Schritt t_1-t_2. Dieses dritte Axiom umschreibt die „Transponierbarkeit“ von Tonschritten. Aus diesen drei Axiomen ergeben sich bereits die Gruppeneigenschaften der Relationserhaltenden Selbstabbildungen der Menge T. Für den Isomorphismus zu den Reellen Zahlen ist ein viertes Axiom erforderlich, welches besagt, dass jeder noch so große Tonschritt übertroffen werden kann durch ausreichende Wiederholung eines „kleinen“ Tonschrittes.

7. Intervallzahl und Frequenzverhältnis sind zwei isomorphe Formulierungen der Intervalle. Der Isomorphismus zwischen den beiden Formulieren ist die Exponentialfunktion bzw.der Logarithmus.
8. Etwas weniger mathematisch ausgedrückt: Die Gruppe der Intervalle entspricht der additiven Gruppe der Intervallzahlen und sie entspricht der multiplikativen Gruppe der Frequenzverhältnisse. Die Intervalle mit rationalen Intervallzahlen sind Stufen einer gleichteiligen Oktavteilung. Die Intervalle mit rationalen Frequenzverhältnissen sind die Intervalle der Partialtonreihe. Beide sind von musikalischer Bedeutung, deswegen interessieren wir uns sowohl für die Intervallzahl als auch für das Frequenzverhältnis eines Intervalls.

§ 1 Intervallzahl und Frequenzverhältnis

Unter einem Intervall verstehen wir einen Tonschritt, also den Schritt von einem ersten zu einem zweiten Ton. Wir beschäftigen uns hier mit melodischen Intervallen, nicht mit dem Intervall als harmonischem Zweiklang.

Die ***Intervallzahl IZ*** ist eine reelle Zahl und beschreibt ein Intervall gemessen an einem Oktavschritt nach oben. Beispielsweise bedeutet +0.5 einen Tritonus nach oben, -1.08333…. eine kleine None (in gleichschwebend temperierter Stimmung) hinunter.

Zweiklänge können wir mit dem Betrag der IZ der beteiligten Töne charakterisieren.

Oft wird das Intervall nicht an der Oktave gemessen, sondern am hundersten Teil des temperierten Halbtones. Dieses Maß heißt ***Cent***. Da uns die Oktave als Maß der Tonschritte mehr überzeugt als der hunderste Teil des temperierten Halbtonschrittes, ziehen wir die IZ vor. Klarerweise ist die Cent-Zahl eines Tonschrittes das 1200-fache seiner IZ.

Intervalle nach oben haben eine positive IZ, Intervalle nach unten haben eine negative IZ. Wir sprechen auch kurz von „***positiven Intervallen***“ und „***negativen Intervallen***“

Die Superposition von Intervallen hat ihre Entsprechung in der Addition der IZ, beispielsweise resultiert aus einer großen temperierten Terz nach oben und einer kleinen temperierten Terz nach unten ein temperierter Halbton nach oben: 1/3 – 1/4 = 1/12

Was hier ohne weitere Begründung dargestellt wurde, findet man in „Axiomatische Theorie der Töne" genauer ausgeführt bzw.in der Vorbemerkung 6 zusammengefasst. Insbesondere ist die Superposition von Intervallen das Hintereinanderausführen von Intervallen, welche als Isomorphismen der Tonmenge und ihrer Struktur aufgefasst werden.

Nicht mit der IZ zu verwechseln ist das Frequenzverhältnis: Jedem Ton entspricht physikalisch eine periodische Schwingung der Luftteilchen mit einer bestimmten Frequenz, die vom Menschen als Tonhöhe wahrgenommen wird. (Was wir hier als Ton bezeichnen, ist für den Physiker ein Klang. Die periodische Schwingung der Luftteilchen ist für ihn eine Überlagerung einzelner Sinus-Schwingungen (=Tönen im Sinne der Physik), deren Frequenzen eine arithmetische Reihe bilden).

Für unsere Betrachtungen wichtig ist die Beobachtung, dass wir zwei Intervalle genau dann als gleich groß empfinden, wenn sie im Quotienten Frequenz des zweiten Tones dividiert durch Frequenz des ersten Tones übereinstimmen. Dieser für ein Intervall charakteristische Quotient heißt ***Frequenzverhältnis FV*** des Intervalls und ist immer eine positive reelle Zahl. Beispielsweise hat eine Oktave nach oben FV=2, eine reine Quint nach unten FV = 2/3. Für positive (bzw.negative) Intervalle ist das FV größer (bzw.kleiner) als eins.

Da ein Intervall durch sein FV charakterisiert werden kann, entspricht der Superposition von Intervallen die Multiplikation ihrer Frequenzverhältnisse. Denn $f(t_2)/f(t_1)$ mal $f(t_3)/f(t_2) = f(t_3)/f(t_1)$, wobei wir $f(t_1)$ geschrieben haben für die Frequenz (physikalische Frequenz der Schwingung der Luftmoleküle) des Tones t_1.

Daraus folgt für den Mathematiker, dass FV = exp(c*IZ). Dabei ist exp die Exponentialfunktion und c eine Konstante, die zu eruieren ist. Wendet man die Gleichung beispielsweise auf die Oktave an, folgt 2 = exp(c), also c=ln(2) und somit

$$\mathbf{FV = 2^{IZ}} \qquad \text{(FV gleich 2 hoch IZ)}$$

Diese Beziehung zwischen Höreindruck (IZ) und physikalisch gemessenem Längenverhältnis FV geht auf Pythagoras zurück, allerdings üblicherweise in der Umkehrung. Geht man vom physikalisch gewonnenen Längenverhältnis aus, ist der Höreindruck logarithmisch:

$$\mathbf{IZ = \log_2 (FV)}$$

Dabei bezeichnet $\log_2$ den Logarithmus zur Basis zwei, also $\log_2(x) = \ln(x)/\ln(2)$.

Deshalb wurde aufgrund einer Konvention die oben erwähnte Cent-Zahl eines Intervalls definiert als 1200 * $\log_2$ (FV). Die Cent-Zahl ist das 1200fache der IZ. Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass die Cent-Zahl dann und nur dann eine rationale Zahl ist, wenn die IZ rational ist.

Unser Höreindruck IZ entspricht also dem Logarithmus des materiellen Substrates. Gleiches gilt auch für unsere Lautstärkenwahrnehmung (Dezibel als Logarithmus des physikalischen Substrats). Wie weit sind unsere Sinneseindrücke ein logarithmischer Spiegel unserer Naturmessungen? „Ist der Geist der Logarithmus der Materie?"

§ 2 Rationale FV und rationale IZ

Intervalle mit rationalem FV nennen wir „natürlich“.

Die Partialtonreihe eines gegebenen Tones bilden die Töne, deren Frequenzen natürliche Vielfache (d.h.ein k-Faches mit $k \in \mathbf{N}$) der Frequenz des gegebenen Tones sind. Für eine natürliche Zahl k hat also der k-te Partialton die k-fache Frequenz des Grundtones. Zwei beliebige Partialtöne eines Grundtones bilden ein natürliches Intervall, denn q/p ist das FV des Schrittes vom p-ten zum q-ten Partialton. Umgekehrt ist jedes natürliche Intervall mit FV= r/s das Interval vom s-ten zum r-ten Ton der Partialtonreihe jedes beliebigen Tones.

Intervalle mit rationaler IZ nennen wir „gleichteilig“.

Hat ein Intervall die IZ=p/q, lässst es sich als p-te Stufe in einer gleichschwebend q-tönig temperierten Tonleiter (gleichmäßigen q-tönigen Oktavteilung) auffassen. Umgekehrt besteht eine n-tönig gleichschwebend temperierte Tonleiter aus den Intervallen mit IZ 0, 1/n, 2/n, … ,(n-1)/n.

Ist ein Intervall sowohl natürlich als auch gleichteilig, so ist IZ eine Ganze Zahl (so ist das Intervall ein Vielfaches der Oktave)

Denn sei IZ = r/s und FV = p/q wobei $r \in \mathbf{Z}$ und $s,p,q \in \mathbf{N}$. Dabei dürfen wir annehmen dass r,s teilerfremd sind und ebenso p,q teilerfremd sind (dass wir gekürzte Brüche vor uns haben).

Wir gehen aus von $p/q = 2^{(r/s)}$. Da somit auch $q/p = 2^{(-r/s)}$, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass r nicht negativ ist. Wir multiplizieren mit q und potenzieren mit s

$p^s = q^s * 2^r$

Aus den Sätzen über Existenz und Eindeutigkeit von Primzahlzerlegungen folgt, dass q=1 und $p^s=2^r$. Also ist FV eine Zweierpotenz und IZ ganzzahlig.

Der bescheidene mathematische Hintergrund dieser Überlegungen steht in seltsamem Gegensatz zur Bedeutung des Satzes, die uns in Versuchung führt, von der ***fundamentalen Aporie*** der Theorie der Intervalle respektive der Stimmungen und Skalen zu sprechen: **Außer den Vielfachen der Oktave gibt es kein Intervall, das sowohl natürlich als auch gleichteilig wäre.**

Für Esoteriker ausgeführt: Es scheint also auch der Musik unser Schicksal nicht erspart zu bleiben: Sobald sie sich materialisiert (in Luftschwingungen) und damit für unsere Sinne wahrnehmbar wird, unterliegt sie der Scheidung in eine Zweiheit, sozusagen in Körper und Geist. Drei Schöpfungstage lang hat Gott geschieden, schließlich hat er gar das Ebenbild Gottes in Mann und Weib geschieden. Der Zwiespalt ist Gebärvater aller Dinge: πολεμος παντων πατηρ.

Zu „gleichteilig“ ist Planung, Kalkül, Konstruktion zu assoziieren, zu „natürlich“ Ruhe, Geborgenheit, Wohklang. Haben-Sein. Wohl-Fühlen. Aktiv-Passiv. Yin-Yang: ein weites Feld für Freizeitphilosophen.

§ 3 Oktavraum

Bei vielen musiktheoretischen Betrachtungen werden Töne, die nur ein ganzzahliges Vielfaches einer Oktave auseinanderliegen, identifiziert. Dies zeigt sich auch in der üblichen Benennung der Töne des diatonischen Systems durch Buchstaben, die sich von Oktave zu Oktave wiederholen.

Dies führt uns dazu, aus der Gruppe der Intervalle „die von der Oktave erzeugte Untergruppe herauszudividieren“. Das geschieht mit folgenden Definitionen: Zwei Intervalle heißen kongruent (modulo Oktave), wenn sie sich um ein ganzzahliges Vielfaches der Oktave unterscheiden. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn ihre IZ eine ganzzahlige Differenz haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Quotient ihrer FV eine Zweierpotenz (mit ganzzahligem Exponenten) ist.

Indem wir kongruente Intervalle identifizieren, erhalten wir den ***Oktavraum*** als Menge der Kongruenzklassen. Die Operation der Superposition von Intervallen auf der Menge der Intervalle überträgt sich auf den Oktavraum.

Was bei der IZ nach dem Komma steht, ist allen Intervallen einer Kongruenzklasse gemeinsam und kennzeichnet diese Klasse im Oktavraum.

Schreibt man das FV binär, so ist die Ziffernfolge ohne Rücksicht auf das Komma kennzeichnend für eine Kongruenzklasse. Die verschiedenen Vertreter einer Kongruenzklasse unterscheiden sich nur in der Position des Kommas im binär geschriebenen FV. (das Komma in der binären Ziffernfolge zu verschieben bedeutet, dem $\log_2$ Natürliche Zahlen zu addieren (Kommaverschiebung nach rechts) oder zu subtrahieren (…nach links).

Für jede Kongruenzklasse gilt: Die Eigenschaften „natürlich“ und „gleichteilig“ finden sich entweder bei allen oder bei keinem Vertreter der Klasse. So lassen sich diese Eigenschaften auf die Kongruenzklassen im Oktavraum übertragen.

Die obige Aporie lautet somit: **ein natürliches und gleichzeitig gleichteiliges Intervall ist kongruent zur Prim.**

Der Oktavraum bietet auch die Ausgangsbasis für synästhetische Betrachtungen zwischen Akustik und Optik, umfasst doch der Frequenzbereich des sichtbaren Lichtes genau eine Oktave. Es gibt verschiedene Ansätze, den Oktavraum auf den Bereich des sichtbaren Lichtes zu beziehen. Daraus ergibt sich, dass nicht einzelne Töne, sondern dass die Intervalle mit ihren Frequenzverhältnissen den verschiedenen Farben zuzuordnen sind, wie genau, ist ein Gebiet für Glaubenskriege, resultieren doch aus solchen Betrachtungen „konsonantere Farben“ und „dissonantere Farben“.

Wer die logarithmische Beziehung zwischen FV und IZ verstanden hat, ist auch versucht, die Farbskala in analoger Weise „logarithmisch zu entzerren“. Dabei würde man jeder Farbe den Quotienten ihrer Schwingungszahl und dem Rand des sichtbaren Bereiches zuordnen und dann den Zweierlogarithmus dieses Quotienten als Farbzahl (mit Wert zwischen null und eins) definieren.

§ 4 Zum Begriff der Tonsysteme

Einige Intervalle haben historische Namen wie Prim, Sekund, Terz, Quart,… Wir vermeiden diese Namen weitestgehend (wenn auch nicht immer), den erstens sind sie ungenau, da beispielsweise die Frequenzverhältnisse 9/8, 10/9, $\sqrt{5}/2$, $2^{(1/6)}$ alle als Große Sekunde bezeichnet werden. Zweitens sind die Namen nur dann Sinn stiftend, wenn man sich auf die diatonische Tonleiter von sieben Tönen festlegt. Aus dieser Festlegung stammt der Name „Oktave“ - an dem wir inkonsequenterweise festhalten, immerhin sind ihm IZ = 1 und FV = 2 eindeutig zugeordnet, es gibt nur ein Intervall namens Oktave. Der Name „Einheit“ statt „Oktave“ würde besser passen; im Oktavraum ist die Oktave der Prim äquivalent, diese Bezeichnung schmerzt weniger.

Im Begriff Tonsystem steckt einerseits das Material (Stimmung, Skala), i.e. eine endliche Menge von Intervallen, andererseits umfasst der Begriff Tonsystem die Gesamtheit der Beziehungen, die der Hörer zwischen den Materialelementen empfindet (Schema der Tonbeziehungen, Tonalität, Modus).

Eine ***Skala*** sei eine endliche Teilmenge des Oktavraumes, welche die Klasse der Prim und wenigstens eine weitere Klasse enthält, welche nicht die Primklasse ist.

Eine ***natürliche*** Skala besteht aus lauter natürlichen Intervallen. Enthält eine natürliche Skala ein Intervall, welches (durch Superposition) die ganze Skala erzeugt, nennen wir sie eine ***pythagoräische Skala.***

Eine ***abgeschlossene Skala*** sei eine endliche Untergruppe der Intervalle

Alle Elemente einer abgeschlossenen Skala sind gleichteilige Intervalle, denn ein nicht gleichteiliges Element würde eine unendliche Untergruppe erzeugen. Umgekehrt erzeugt jedes gleichteilige Intervall eine abgeschlossene Skala.

Weil eine abgeschlossene Skala nur endlich viele Elemente hat - ihre Anzahl sei m - , gibt es somit unter den von der Prim verschiedenen Elementen ein kleinstes mit dem FV = $\sqrt[m]{2}$ und der IZ = 1/m.

Ein Korollar zur Aporie ist die Erkenntnis: **Es gibt keine nichttriviale abgeschlossene Skala aus natürlichen Intervallen**.

In dieser Situation sind zwei Wege denkbar: Entweder suche ich zu einem gleichteiligen Intervall ein „fast gleich großes“ natürliches Intervall und approximiere deshalb das (irrationale) FV durch Rationale Zahlen. Oder ich suche zu einem natürlichen Intervall oder mehreren natürlichen Intervallen „fast gleich große“ gleichteilige Intervalle (und damit eine abgeschlossene Skala, die diese natürlichen Intervalle näherungsweise enthält. Meistens wurde der zweite Weg begangen, auch wir wollen ihm in §5 folgen.

§ 5 „Fast-natürliche“ gleichteilige Intervalle

Wir führen im Folgenden die Approximationen der (irrationalen) IZ der ersten 16 Intervalle der Naturtonreihe durch rationale Zahlen durch. Das ist die Fragestellung jeder gleichschwebenden Temperierung.

Dabei sind nur die ungeradzahligen Glieder der Naturtonreihe von Interesse. Theoretisch wird für $n \in \{3/2, 5/4, 7/4, 9/8, 11/8, 13/8, 15/8\}$ jeweils $\log_2(n)$ approximiert. Wir bedienen uns dabei der Technik der Kettenbruchentwicklung.

Das bedeutet, wenn $\langle a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\rangle$ als Schreibweise für den unendlichen einfachen Kettenbruch für $\log_2(n)$ verwendet wird, dass – noch immer theoretisch – folgendermaßen zu rechnen ist:

$$\alpha_0 := \log_2(n) \qquad\qquad a_0 := [\alpha_0]$$

wobei $[\alpha_0]$ den „ganzzahligen Anteil“ der reellen Zahl α_0 bezeichnet, also die größte ganze Zahl, die α_0 nicht übersteigt. In üblicher Weise wird dann

$\alpha_1 \coloneqq 1 / (\alpha_0 - a_0)$ und $a_1 \coloneqq [\alpha_1]$

$\alpha_2 \coloneqq 1 / (\alpha_1 - a_1)$ und $a_2 \coloneqq [\alpha_2]$

$\alpha_3 \coloneqq 1 / (\alpha_2 - a_2)$ und $a_3 \coloneqq [\alpha_3]$

und so weiter. Dabei ist a_0 eine ganze Zahl, die weiteren Glieder a_1 , a_2 , a_3 , a_4, …. sind natürliche Zahlen (echt positive ganze Zahlen). Der Kettenbruch bricht nicht ab, da $\log_2$ (n) eine irrationale Zahl ist.

So weit die Theorie. In der Praxis ermitteln wir mit Hilfe der Logarithmentabelle (des Computers) eine rationale Zahl α_0~ , die so nahe an α_0 liegt, dass die ersten Glieder, so weit wir sie brauchen, in den Kettenbruchentwicklungen von α_0 und α_0~ identisch sind.

Um sicher zu stellen, dass diese Unschärfe nicht zu falschen Resultaten führt, überprüfen wir, ob α_0 zwischen den beiden rationalen Zahlen $<a_0; a_1 , a_2 , a_3 , a_4, \ldots, a_x>$ und $<a_0; a_1 , a_2 , a_3 , a_4, \ldots, a_x,1>$ liegt, um uns auf die Kettenbruchentwicklung $<a_0; a_1 , a_2 , a_3 , a_4, \ldots, a_x>$ verlassen zu können. Diese Rechnungen ersparen wir dem Leser.

Wir beginnen mit FV = 3/2, der reinen Quint.

$\log_2(3/2) = <0;1,1,2,2,3,1,5,2,\ldots>$

Die Theorie der Kettenbruchentwicklung liefert uns die rationalen Approximationen (sog.Konvergenten)

0/1 1/1 1 /2 3/5 7/12 24/41 31/53

Das bedeutet, dass nach der Prim und der Oktave, der halben Oktave und der dritten Stufe in einer 5-teiligen Tonleiter die siebente Stufe in einer 12-tönigen Leiter, dann die 24-ste Stufe in einer 41-tönigen Leiter, danach die 31-ste Stufe in einer 53-stufigen Leiter die jeweils optimalen Approximationen an die reine Quinte sind.

Laut Theorie der Kettenbrüche liegen dies Approximationen abwechselnd unter und über dem Approximanden. Unsere Rechnung ergibt die Abweichungen $\log_2(3/2)$ minus i-te Konvergente

+0.585… -0.415… +0.085… -0.015… +0.0016.. -0.0004… +0.00006…

Zur Vermeidung von Missverständnissen: Die Konvergenten sind rationale Annäherungen an eine irrationale Intervallzahl, sie sind nicht zu verwechseln mit dem (rationalen) FV des betrachteten Intervalls. Die Konvergenten sind Näherungsbrüche an die irrationalen IZ der behandelten natürlichen Intervalle. Diese Näherungsbrüche x/y (verstanden als Intervallzahlen) sind die x-te Stufe in einer y-tönigen gleichteiligen Skala.

Bevor wir uns einen Begriff davon machen, wie nahe die Konvergenten dem wirklichen Wert kommen, wie groß also die berechneten Abweichungen für unser Ohr sind, teilen wir die Resultate unserer IZ-Berechnungen für die weiteren natürlichen Intervalle unserer Liste mit. Wir nennen also Kettenbruchdarstellung der IZ, rationale Annäherungen (Konvergenten) und (additive) Abweichungen, also Differenz des wirklichen Wertes und der Konvergente. Wer diese Abweichungen in Cent sehen möchte, muss den hier genannten Wert mit 1200 multiplizieren:

$\log_2(5/4) = \langle 0; 3, 9, 2, 2, 3, \ldots \rangle$ -

0/1	1/3	9/28	19/59	47/146	160/497
+0.3219…	-0.0114….	+0.0005…	-0.0001		

$\log_2 (7/4) = \langle 0; 1, 4, 5, 4, 5, \ldots \rangle$

0/1	1/1	4/5	21/26	88/109	461/571
+0.80735..	-0.1926..	+0.00735	-0.00034	+0.00001	

$\log_2(9/8) = \langle 0; 5, 1, 7, 1, 2, \ldots \rangle$

0/1	1/5	1/6	8/47	9/53	26/153
+0.1699…	-0.0301..	+0.0033..	-0.00029..		

$\log_2 (11/8) = \langle 0; 2, 5 ,1, 1, 1, 25, \ldots \rangle$

0/1	1/2	5/11	6/13	11/24	17/37
+0.4594..	-0.0406..	+0.0049	-0.0021..	+0.0011..	-0.000029..

$\log_2 (13/8) = \langle 0; 1, 2, 2, 1, 22, \ldots \rangle$

0/1	1/1	2/3	5/7	7/10	159/227
+0.7004..	-0.2926..	+0.0337..	-0.0138..	+0.0004..	

$\log_2 (15/8) = \langle 0; 1, 9, 1, 2, 1, 5, 1, 1, \ldots \rangle$

0/1	1/1	9/10	10/11	29/32	39/43
+0.90689..	-0.0931..	+0.00689..	-0.0022..	+0.0006..	-0.000087..

Um ein Gefühl dafür zu entwickeln, wie groß diese Abweichungen sind, geben wir folgende Näherungswerte für die IZ bekannter Kommata (wieder ist die Cent-Zahl das 1200fache):

> Pythagoräisches Komma (12 reine Quinten minus 7 Oktaven): ca. 0.019;
> Verteilt auf die 12 Quinten = 0.0016 = Abweichung zwischen reiner und temperierter Quint;
> Didymisches Komma (vier Quinten im Oktavraum minus Reine Terz): ca.0.018
> Didymisches Komma (Großer Ganzton minus kleiner Ganzton): ca.0.018
> Großer Ganzton minus Temperierter Ganzton: ca.0.0033

Aus obigen Rechnungen ist einiges zu ersehen, was wir schon wussten, etwa dass die siebente Stufe in einer zwölftönigen gleichmäßigen Oktavteilung in sehr guter Näherung eine Reine Quinte ergibt, genauer kann man die Reine Quinte erst in einer 41tönigen (als 24ste Stufe) oder einer 53tönigen (als 31ste Stufe) approximieren (siehe oben). Die zwölftönig gleichmäßige Oktavteilung enthält in akzeptabler Näherung als vierten Ton auch die Reine Durterz (FV = 5/4), also den Durdreiklang bzw.die ersten sechs Partialtöne, das macht die zwölftönige gleichmäßige Oktavteilung so sensationell erfolgreich.

Als dritte Stufe in einer fünftönigen Oktavteilung ist die Quinte schon sehr gut erkennbar. In einer solchen fünftönigen Oktavteilung liegt die vierte Stufe sehr nahe am siebenten Partialton, d.h.die fünftönige Oktavteilung trifft den 5ten und den 7ten Partialton erstaunlich genau, den großen Ganzton allerdings sehr ungenau - wir kennen diesen zu großen Ganzton zwischen „Alphornsept" und Oktave - die sechstönige Oktavteilung approximiert den großen Ganzton 10x genauer.

Die natürliche Große Terz ist ein ewiges Sorgenkind beim Musizieren in zwölf Tönen. Das zeigt der Näherungsbruch 1/3, das ist die vertraute gleichschwebend temperierte Große Terz als vierte Stufe in unserer 12tönigen Leiter. Für eine bessere Näherung müsste man 28tönige oder 59tönige Oktavteilungen vornehmen, wodurch man die anderen Partialtöne zu weit verfehlen würde.

Der Große Ganzton (FV = 9/8) ist etwas größer, der Kleine Ganzton (FV = 10/9) etwas kleiner als die erste Stufe in einer sechstönigen Oktavteilung (die man Ganztonleiter nennt), der Ganzton in der temperierten Stimmung liegt zwischen Kleinem und Großem Ganzton, deutlich näher am Großen. Denn der Kleine Ganzton hat die IZ = $\log_2 (10/9) = \log_2 (5/4) - \log_2 (9/8) = 1/3 - 0.0114 - 1/6 - 0.0033 = 1/3 - 0.0147$. Also ist die IZ des temperierten Ganztones um ca. 0.0147 größer (bzw.um ca.0.0114 kleiner) als der Kleine (bzw.der Große) Ganzton.

Das Intervall FV = 11/8 ist in der Osteuropäischen Folklore beliebt, fast ist man versucht, dieses Intervall zu Bela Bartoks Ehren „Bartok-Quart" zu nennen. Die Partialtöne 8 bis 12 bilden eine fünftönige Leiter mit ungleichen Stufen, eine Art do-re-mi-fa-so, wobei das fa ungewohnt hoch ist. FV = 11/8 ist in einer 24-tönigen Oktavteilung mit der 11ten Stufe sehr genau getroffen, liegt also recht genau in der Mitte zwischen Quart und Tritonus. Als 5te Stufe einer elftönigen oder 6te Stufe einer dreizehntönigen Oktavteilung ist sie unserer zwölftönigen Oktavteilung denkbar fremd.

§ 6 Beispiele für Skalen

Die abgeschlossenen Skalen sind leicht zu überblicken, das sind die n-tönigen Oktavteilungen (n>1), bei weitem die prominenteste natürlich die Dodekaphonik, die 12-tönige Oktavteilung nach Andreas Werckmeister. Wie wir gesehen haben, bringen Vierteltöne (n=24) zusätzlich zum Durdreiklang auch noch die Bartok-Quarte (FV=11/8) in sehr guter Näherung ein. Weitere Beispiele sind n=5 (Slendro), Pelog (n=7), Shruti(n=22) sowie eine gleichschwebend temperierte 28-tönige Skala nach 2-a-ii (s.u.).

Unter den nicht abgeschlossenen Skalen können wir grob pythagoräische und nicht-pythagoräische unterscheiden. So gelangen wir zu folgender Übersicht:

1. Abgeschlossene Skalen: prominentestes Beispiel ist die gleichschwebend 12-tönig temperierte Stimmung, aber auch 7-tönige Leiter der Gamelanmusik. In der musikalischen Materialkunde hat sich die Cent-Skala eingebürgert (1200-tönige Oktavteilung). Bedenkt man, dass sich die reine von der temperierten Quint um ca.2 Cent unterscheidet, ist der Schritt von einer Stufe zur nächsten „unmerklich klein", so kann jede Skala sehr genau mit einer geeigneten Teilmenge der Cent-Skala approximiert werden. Darin liegt die Bedeutung der Cent-Skala, nicht in einer musikalischen Verwertbarkeit.
2. Nicht abgeschlossene Skalen
    a. Pythagoräische
        i. Erzeugt durch FV = 3/2
            1. Halbtonlose Pentatonik

            2. Heptatonik (diatonische Tonleiter)
            3. Dodekatonik, wird durch gleichschwebende Termperierung zur zwölftönigen Skala.
        ii. Erzeugt durch FV = 5/4
            1. Dreitönig
            2. 28-tönig
        iii. Blasquintensysteme
    b. Nicht pythagoräische
        i. Natürliche:
            1. Naturtonleiterausschnitte
            2. Reine Durskala (cf.Heptatonik 2-a-i-2)
            3. Chinesisches Zithersystem
        ii. Nicht natürliche, z.B.Mitteltönige Stimmung

Weder erhebt diese Übersicht Anspruch auf Vollständigkeit noch können wir behaupten, dass alle diese Skalen auch wirklich aufgetreten sind im Lauf der Musikgeschichte. Es folgen nun Erläuterungen zu den einzelnen Skalen.

Zu 2-a-i: Diese Skalen gehen (zumindest der Legende nach) auf die Saitenteilungen des Pythagoras zurück. In FV ausgedrückt:

2-a-i-1 Pentatonik durch Quintenschichtung hat FV:

nach Erzeugung: FV $\in$ {1, 3/2, 9/8, 27/16, 81/64}

Nach Größe: 1, 9/8, 81/64, 3/2, 27/16,

2-a-i-2 Heptatonik (Diatonische Tonleiter) durch Quintenschichtung

1	9/8	81/64	729/512	3/2	27/16	243/128
FA	SOL	LA	TI	UT	RE	MI

2-a-i-3 Quintenzirkel: wir berechnen die FV, setzen darunter die Tonbezeichnung und darunter nochmals das FV als gerundeten Dezimalbruch.

1	3/2	9/8	27/16	81/64	243/128	729/512
f	c	g	d	a	e	h
1	1.5	1.125	1.689	1.265	1.899	1.423

2187/2048	6561/4096	19683/16384	59049/32768	177147/131072	(531441/524288)
f#	c#	g#	d#	a#	(e#)
1.069	1.603	1.202	1.803	1.351	(1.012)

Das „Pythagoräische Komma“ ist der Tonschritt von f zu e#, also 3^12 / 2^19 = 513441/524288.

2-a-ii Nach der Quinte das nächste nichttriviale Intervall der Partialtonreihe hat das FV=5/4, es ist die sogenannte Naturterz. Die Konvergenten 1/3 und 9/28 für $\log_2(5/4)$ führen uns zu einer dreitönigen und einer 28-tönigen pythagoräischen Skala. Das „Komma“, also das Intervall mit FV (5/4)^3 bzw. (5/4)^28, beträgt (125/128) = 0.97656 bzw.5^28 / 2^65 = 1.009. (Wieder sind hier auch die Dezimalbrüche Frequenzverhältnisse und keine Intervallzahlen).

2-a-iii Die Blasquinte hat eine IZ von ca.0.565 (ist also etwas kleiner als die temperierte Quinte mit IZ= 0.58333…). Sie entsteht beim Überblasen eines gedackten Rohres und bietet E.M.von Hornbostel laut MGG die Basis zur Erklärung verschiedener außereuropäischer Tonsysteme.

2-b-i-1 Die Naturtonreihe (Partialtöne) mit den FV = (k+1)/k für kεNN liegt den Skalen der Naturblasinstrumente (Alphorn, ventillose Blechblasinstrumente) zugrunde. Natürlich ist stets nur ein Ausschnitt aus der gesamten Reihe im Gebrauch.

2-b-i-2 Die reine Durskala ist aus der diatonischen Durtonleiter 2-a-i-2 entstanden durch das Bestreben, das „Didymische Komma“ mit FV = 81/80 („Abweichung der pythagoräischen Terz von der reinen Durterz“) auszubessern, indem die 81/80 durch 5/4 ersetzt wird. So lauten die FV der reinen Durskala

1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8

Dadurch sind Subdominante, Tonika und Dominante reine Durdreiklänge 4:5:6

2-b-ii In der Reinen Durskala unterscheiden sich die ersten beiden Ganztonschritte um das „Didymische Komma“ mit FV = 81/80 (=9/8 : 10/9). Um dieses auszumerzen hat man im Mittelalter das Intervall FV=5/4 einfach „halbiert“ und die diatonische Leiter mit den Schritten √5/2 begonnen.

§ 7 Distante gleichteilige Skalen

Wir untersuchen n-tönige gleichteilige Skalen daraufhin, wie nahe sie den natürlichen Intervallen kommen, in erster Linie der Reinen Quinte (3.Partialton), danach der Reinen Terz (5.), der Alphornsept (7.), dem Großen Ganzton (9.) und den weiteren ungeradzahligen Partialtönen. (Die geradzahligen kamen im Oktavraum ja bereits vor und brauchen nicht nochmals berücksichtigt werden.)

Dazu ermitteln wir, wie nahe die n-fache IZ des (2k+1)ten Partialtones einer ganzen Zahl kommt und dividieren diesen Abstand durch n für k ϵ {1,…,7} und n ϵ {5,…,60} (siehe Excel-Sheet). Etwas ausführlicher: Zur Reinen Quinte berechnen wir in der schwarzen Spalte, für n von 2 bis 60, wo das n-fache Vielfache einer Reinen Quinte im Oktavraum zu liegen kommen. In der roten Spalte ermitteln wir den Abstand dieses n-Fachen einer Reinen Quinte zur nächsten ganzen Zahl. In der grünen Spalte dividieren wir diesen Abstand durch n und erhalten den Abstand von einer Reinen Quinte zum nächstgelegenen Intervall einer n-tönigen Oktavteilung. Ebenso wie bei der Reinen Quinte verfahren wir im Falle der Reinen Terz u.s.w.

Um für ein gegebenes n ϵ {5,…,60} ein Maß dafür zu bekommen, „wie genau die wichtigsten natürlichen Intervalle“ durch Leitertöne einer n-teiligen Skala getroffen werden, summieren wir diese (im Excel-Sheet grünen) mit einem „Wichtigkeitsfaktor“ multiplizerten Abstände über k ϵ {1,…}. Dieser Wichtigkeitsfaktor soll monoton fallen mit k (denn der Abstand zur Reinen Quinte „zählt am meisten“, danach kommt die Reine Terz, u.s.w.). Der Wichtigkeitsfaktor soll mit wachsendem k sogar so schnell fallen, dass die unendliche Summe über alle k konvergiert. Wir führen das mit zwei verschiedenen Wichtigkeitsfaktoren durch, den (mit wachsendem k) langsamer fallenden Faktoren $1/(2k+1)^2$ und den sehr schnell fallenden Faktoren $1/(2k+1)!$. Wir setzen also

$$f2(n) := (1/n) * \mathrm{SUM}(\mathrm{MIN}\{ |r- \log_2((2k+1)^{\wedge}n)| ; r \in \{1,\dots\} \} / (2k+1)^2 ; k \in \{1,\dots\})$$

$$f(n) := (1/n) * \mathrm{SUM}(\mathrm{MIN}\{ |r- \log_2((2k+1)^{\wedge}n)| ; r \in \{1,\dots\} \} / (2k+1)! ; k \in \{1,\dots\})$$

Ausführlicher gesagt: wir gewichten den Abstand zur Reinen Quint mit 1/9 bzw. 1/6, den zur Reinen Durterz mit 1/25 bzw. 1/120, den Abstand zur Alphornsept mit 1/49 bzw. 1/5040 und so weiter. Für eine brauchbare Approximation an den Grenzwert dieser Reihen nehmen wir im ersten Fall die ersten sieben Reihenglieder (Abweichung < 1/n*60), im zweiten Fall genügen vier (Abweichung < 0.00011/n). Dies geschieht in den Spalten U bzw.X des Excel-Sheets.

Kleine Funktionswerte bedeuten, dass in der n-tönigen gleichteiligen Skala vor allem die ersten Partialtöne in guter Näherung enthalten sind. Große Funktionswerte bedeuten, dass die leitereigenen Töne der n-teiligen Skala (vor allem von den ersten) Partialtönen Abstand halten.

Beide Gewichtungen ergeben bei den kleinen Funktionswerten eine übereinstimmende Rangfolge. n=53 trifft die natürlichen Intervalle am besten, gefolgt von n=41 und von n=58.

Bei den großen Funktionswerten liegt n=6 an der Spitze, gefolgt von n=8, soweit herrscht Übereinstimmung bei beiden Gewichtungen. Ebenfalls übereinstimmend sind die Werte n=11, n=9 und n=13 auf den Rängen III bis VI zu finden.

Warum interessieren uns auch die n mit großen f2-Werten bzw. f-Werten, also jene n-tönigen Oktavteilungen, deren Leiterintervalle den natürlichen Intervallen möglichst „aus dem Weg gehen“?

Als in der Entwicklung der Europäischen Kultur das Zeitalter der positivistischen Physik zu Ende ging, als Literatur nicht mehr notwendigerweise grammatisch und logisch schlüssig, die Malerei nicht mehr gegenständlich und die Harmonie in der Musik nicht mehr grundtonbezogen zu sein hatte, war es – nicht ganz so allein, wie er glaubte - Arnold Schönberg, der mit einer Revolution, durch die er „der deutschen Musik die Vorherrschaft für die nächsten hundert Jahre“ gesichert zu haben glaubte, wie sein Schüler Josef Rufer in „Das Werk Arnold Schönbergs“, Kassel 1959, p.26 überliefert, die klassenlose Gesellschaft der Töne verwirklichen wollte. Denkt man diese Revolution zu Ende, sollte man nicht bei zwölf Tönen bleiben, denn die zwölftönige gleichteilige Skala enthält in sehr guter Näherung die subversive, quasi konterrevolutionäre Zelle des Durdreiklangs. Die klassenlose Gesellschaft der Töne gelingt dann am ehesten, wenn alle Intervalle eines abgeschlossenen Tonsystems gleichermaßen weit entfernt sind von den natürlichen Intervallen. Das ist gleichsam die komplementäre Fragestellung zu dem, was in § 5 durchgeführt wurde. Wir interessieren uns also auch für n-tönige gleichteilige Skalen, in welchen die leitereigenen Intervalle von den prominentesten natürlichen Intervallen entfernt liegen.

Besonders gut gelingt dies bei der sechstönigen und der achttönigen Oktavteilung. Wir zeigen hier, wie Großer Ganzton, Durtterz, Bartokquart, Reine Quint und Alphornsept in der sechstönigen bzw.achttönigen Skala liegen (leitereigene Intervalle sind unterstrichen):

$0 < \underline{0.16667} < 0.169925 < 0.321928 < \underline{0.333333} < 0.459432 < \underline{0{,}5} < 0.584963 < \underline{0.66667} < 0.807355 < \underline{0.83333} < \underline{1{,}0}$

0<0.125<0.169925<0.25<0.321928<0.375<0.459432<0.5<0.584963<0.625<0.75<0.807355<0.875<1.0

Die gleiche Darstellung lautet in Cent-Zahlen

0 < 200 < 202,590 < 386,313 < 400 < 551,318 < 600 < 701,955 < 800 < 968,826 < 1000 < 1050 < 1200

0 < 150 < 202,590 < 300 < 386,313 < 450 < 551,318 < 600 < 701,955 <750 < 900 < 968,826 < 1050 < 1200

In diesen Darstellungen mit Cent-zahlen sieht man die Lage des Großen Ganztones, der Durterz, der Bartokquart („zwischen f und fis“), der reinen Quint und der Alphornsept plastisch bezogen auf die chromatischen Töne des Klaviers. Ebenso zeigt sich, dass die 8-tönige Leiter abwechslungsweise genau zwischen den chromatischen Tönen und auf den Tönen (des verminderten Septakkordes) liegt. Man halbiert quasi die temperierten kleinen Terzen, um die gleichteilig 8-tönige Skala zu erhalten. Dies kann man als eine Lanze für das Vierteltonklavier verstehen, erlaubt dieses doch gleichzeitig das vertraute 12-tönige System, die sechstönige Ganztonleiter und auch – im Sinne einer klassenlosen Gesellschaft der Töne - die Oktophonie!

Wenn die neue klassenlose Gesellschaft der Töne lediglich den Durdreiklang vermeiden will, sind die 11-tönige und die 23-tönige gleichteilige am geeignetsten. Als Primzahlen schaffen diese beiden Zahlen 11 und 23 eine wesentlich neue Situation für Komponisten, die bisher mit 12-tönigen Reihen gearbeitet haben.

Die 10-teilige Skala enthält den 7-ten, 13-ten und 15-ten Partialton sehr genau, der Durdreiklang hingegen ist dieser Skala reichlich fremd.

Abschließend sei die Frage erlaubt, ob Schönberg tatsächlich die klassenlose Gesellschaft wollte oder ob er eben gerade der Tatsache ihren Reiz abzugewinnen wusste, dass es in einer Zwölftonreihe konsonantere und dissonantere Intervalle gibt. Vielleicht entsprechen diese Gedanken zu distanten gleichteiligen Skalen eher der Ideenwelt des Josef Matthias Hauer. Ob er dieser Zahl acht etwas hätte abgewinnen können? Dies führt auf einer nüchternen Ebene zu einem gruppentheoretischen Vergleich der zyklischen Gruppen mit acht und mit zwölf Elementen, auf höheren (spekulativeren), bis nach Babylon reichenden Ebenen zum Wesen der Zahlen zwölf und acht.